1. Определение линейного оператора.

Линейным оператором в векторном пространстве V (эндоморфизмом пространства V) называется отображение A: V → V, удовлетворяющее условиям:

1. A (x + y) = Ax + Ay для любых x, y ∈ V;

2. A(λx) = λAx для любых x ∈ V, λ ∈ F.

1. Перечислите операции в множестве End(X).

Линейные операторы в одном векторном пространстве можно складывать и умножать на скаляры как обычные функции: (A + B) x = Ax + Bx, (λA) x = λ(Ax). Относительно этих операций они образуют векторное пространство. Далее, если A, B ∈ End (V), то их произведение (композиция) AB также является линейным оператором. Умножение линейных операторов ассоциативно. Легко понять, что EA = AE = A для любого A ∈ End (V). Столь же легко понять, что в общем случае AB ≠BA (приведите пример). То есть операторы со сложением и умножением являются ассоциативным кольцом с единицей. Векторное пространство + кольцо + ((λa) b = a(λb) = λ(ab)) = алгебра.

1. Определение образа оператора.

Для линейного оператора A определяется его образ Im (A) = = {Ax | x ∈ V} и ядро Ker(A) = {x ∈ V | Ax = 0}.

Образ и ядро являются подпространствами в соответствующем векторном пространстве, то есть замкнуты относительно сложения векторов и умножения на скаляры.

1. Определение ядра оператора.

Для линейного оператора A определяется его образ Im (A) = = {Ax | x ∈ V} и ядро Ker(A) = {x ∈ V | Ax = 0}.

Образ и ядро являются подпространствами в соответствующем векторном пространстве, то есть замкнуты относительно сложения векторов и умножения на скаляры.

1. Сформулируйте теорему о ядре и образе.

dim Im A + dim Ker A = dim V.

Выберем базис e1, e2, . . ., ek подпространства Ker A и дополним его векторами ek+1, . . . , en до базиса всего пространства V . Достаточно показать, что векторы A(ek+1), . . ., A(en) составляют базис Im A. Они порождают образ, так как для любого имеем Векторы ,…, линейно независимы, так как из равенства следует, что и является комбинацией векторов e1 , e2 ,…, ek , что возможно только если все равны 0.

1. При каком(их) условии(ях) A является изоморфизмом?

Следующие свойства линейного оператора A эквивалентны:

1) A — изоморфизм.

2) Ker A = {0}.

3) Im A = V.

1. Определение матрицы линейного оператора.

Матрицей линейного оператора A в базисе , , . . ., называется матрица A = (­aij), определяемая из равенств .

1. Чему равна размерность пространства End(X)?

Если dim V = n, то размерность End(V) как векторного пространства равна n2.

1. Сформулируйте закон преобразование матрицы оператора при смене базисе.

При смене базиса в линейном пространстве с матрицей оператора A выражается через формулу подобия матриц: если C - матрица перехода от старого базиса к новому, то матрица оператора A' в новом базисе связана с матрицей A в старом базисе следующим образом: .

где - обратная матрица к матрице .

1. Какой оператор называют невырожденным?

Определитель матрицы оператора зависит только от самого оператора, но не от базиса, в котором записана эта матрица. Действительно, . Это позволяет говорить об определителе оператора и рассмотреть невырожденные операторы в пространстве V, у которых . Невырожденные линейные оператора в пространстве V образуют группу GL (V), называемую полной линейной группой пространства V.

1. Определение инвариантного подпространства.

Подпространство U ≤ V называется инвариантным относительно оператора A (A-инвариантным), если AU ≤ U, то есть для любого x ∈ U его образ Ax ∈ U.

1. Определение собственного вектора.

Ненулевой вектор x ∈ V называется собственным вектором оператора A, если Ax = λx. Число λ ∈ F называется при этом собственным значением (собственным числом) оператора A, отвечающим собственному вектору x.

1. Определение собственного значения.

Ненулевой вектор x ∈ V называется собственным вектором оператора A, если Ax = λx. Число λ ∈ F называется при этом собственным значением (собственным числом) оператора A, отвечающим собственному вектору x.

1. Определение собственного подпространства.

Подпространство Ker(A − λE) называется собственным подпространством оператора A, соответствующим собственному значению λ и обозначается Vλ. Помимо собственных векторов, оно содержит нулевой. Любое собственное подпространство оператора A является A-инвариантным.

1. Определение геометрической кратности.

Геометрической кратностью g(λ) собственного значения λ называется размерность соответствующего ему собственного подпространства: g(λ) = dim .

1. Как находится характеристический полином?

Многочлен называется характеристическим многочленом оператора A. Корни характеристического многочлена называются спектром оператора A.

Для нахождения характеристического полинома матрицы A используется следующее выражение: det(A - λI), где det обозначает определитель матрицы, λ - символьное значение, а I - единичная матрица того же порядка, что и матрица A. После нахождения этого выражения и раскрытия скобок получается характеристический многочлен, чей корень будет собственным значением матрицы A.

1. Определение алгебраической кратности.

Алгебраической кратностью m(λ) собственного значения λ называется его кратность как корня характеристического многочлена.

Геометрическая кратность собственного значения не превосходит его алгебраической кратности.

1. Определение линейной независимости подпространств.

Подпространства ,…, называются линейной независимыми, если равенства следует, что

Собственные подпространства, отвечающие попарно различным собственным значениями λ1, λ2, . . ., λ­n оператора A линейно независимы.

1. Определение оператора с простым спектром.

Оператор имеет простой спектр, если у него нет кратных собственных значений. Это означает, что каждое собственное значение имеет только одномерное собственное подпространство. Иными словами, для оператора с простым спектром каждое собственное значение характеризуется только одним собственным вектором.

1. Как выглядит матрица оператора с простым спектром?  
   Пусть dim V = n. Если линейный оператор **A** векторного пространства V имеет n попарно различных собственных значений, то он называется линейным оператором с простым спектром.

Линейный оператор **A** n - мерного векторного пространства является линейным оператором с простым спектром тогда и только тогда, когда характеристическое уравнение линейного оператора имеет n попарно различных корней, принадлежащих полю P.

1. Определение диагонализуемого оператора (оператора скалярного типа).

Линейный оператор в конечномерном векторном пространстве называется диагонализируемым, если существует базис, в котором матрицам этого оператора имеет диагональный вид. Другими словами, диагонализируемость оператора эквивалентна существованию собственного базиса.

1. Перечислите свойства проекторов.

В линейной алгебре свойства проектора определяют его поведение при преобразовании векторов. Некоторые из основных свойств проекторов в линейной алгебре включают:

1. Проектор: оператор, который при применении к вектору оставляет его на месте (как покрасили, так и ползи).

2. Проектор на подпространство: преобразование, которое сокращает пространство до заданного подпространства.

3. Ранг проектора: размерность пространства, в которое он проецирует.

4. Образ проектора: подпространство, в которое он проецирует векторы.

5. Ядро проектора: множество векторов, которые проецируются в нуль.

6. Проекция: результат применения оператора проектора.

7. Инвариантность: проектор инвариантен относительно своего образа и ядра.

8. Собственные числа и векторы: могут быть использованы для анализа проекторов.

1. Что такое спектральное разложение диагонализуемого оператора?

Пусть оператор A диагонализируем и V = ⨁ni=1  . Рассмотрим проектор на подпространство параллельного прямой сумме оставшихся подпространств. Тогда при и . Легко проверяется, что оператор A действует на любой вектор так же, как оператор . Выражение называется спектральным разложением оператора A.

1. Сформулируйте критерий диагонализуемости.

Оператор диагонализируем тогда и только тогда, когда выполняются следующие два условия:

1) Характеристический многочлен раскладывается на линейные сомножители (то есть все его корни лежат в поле F);

2) Геометрическая кратность каждого собственного значения равна его алгебраической кратности.

1. Определение корневого вектора высоты k.

Вектор x ∈ V называется корневым вектором оператора A, отвечающим собственному значению λ ∈ F, если существует такое целое неотрицательное число k, что . Наименьшее такое k называется высотой корневого вектора x. Если x – корневой вектор высоты k, то является корневым вектором высоты k-1.

1. Какую высоту имеет собственный вектор?

а) Корневые векторы высоты 0 — нулевые векторы;

б) Корневые векторы высоты 1 — собственные векторы;

в) Каждый многочлен есть корневой вектор с собственным числом 0 оператора дифференцирования пространства многочленов, причём высота многочлена как корневого вектора равна n + 1, где n — степень этого многочлена;

1. Определение корневого подпространства.

Корневые векторы, отвечающие собственному значению λ, высоты — это . Возникает цепочка подпространств

где – корневое подпространство с собственным значением

1. Перечислите свойства корневых подпространств.

1) – инвариантно;

2) — нильпотентный оператор, то есть существует такое неотрицательное целое m, то ;

3) невырожден при µ ≠ λ;

4) (геометрический смысл алгебраической кратности).

1. Определение нильпотентного оператора.

Нильпотентным называется линейный оператор A на векторном пространстве V, если существует такое натуральное число n, что-то , где 0 – это нулевой оператор. Другими словами, для нильпотентного оператора A существует такое число n, что применение оператора A к вектору n раз подряд даёт нулевой вектор.

1. Определение циклического подпространства.

Подпространство то называется циклическим подпространством нильпотентного оператора N, порожденным вектором x.

1. Что находится в клетках диаграммы Юнга?

Диаграммы Юнга:

|  |  |
| --- | --- |
|  |  |
|  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |

Квадратики — векторы жорданова базиса, нильпотентный оператор действует на них сверху вниз.

• Высота строки соответствует высоте базисного вектора, а высота произвольного вектора (линейной комбинации базисных) определяется как наибольшая высота базисного вектора, входящего в эту линейную комбинацию с ненулевым коэффициентом.

• – тый столбец соответствует жордановой цепочке — базису циклического пространства .

• Ядро оператора — линейная оболочка векторов, стоящих в строках высоты не больше k.

• Векторы, лежащие в нижней строке, при действии оператора переходят в нулевые.

1. Что находится в столбцах диаграммы Юнга?

Диаграммы Юнга:

|  |  |
| --- | --- |
|  |  |
|  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |

Квадратики — векторы жорданова базиса, нильпотентный оператор действует на них сверху вниз.

• Высота строки соответствует высоте базисного вектора, а высота произвольного вектора (линейной комбинации базисных) определяется как наибольшая высота базисного вектора, входящего в эту линейную комбинацию с ненулевым коэффициентом.

• – тый столбец соответствует жордановой цепочке — базису циклического пространства .

• Ядро оператора — линейная оболочка векторов, стоящих в строках высоты не больше k.

• Векторы, лежащие в нижней строке, при действии оператора переходят в нулевые.

1. Напишите общий вид матрицы жордановой клетки.

Если вернуться к произвольному линейному оператору A, то можно заметить, что на циклическом подпространстве нильпотентного оператора оператор A задаётся матрицей

называемой жордановой клеткой с собственным значением .

1. Как выглядит жорданова нормальная форма?

Жордановой матрицей называется блочно-диагональная матрица

Жорданова матрица также называется жордановой нормальной формой (ЖНФ) для оператора A.

Если характеристический многочлен раскладывается на линейные сомножители, то существует базис, в котором матрица оператора A жорданова. Она определена однозначно, с точностью до перестановки жордановых клеток.

Матрица любого оператора над полем комплексных чисел приводится к ЖНФ.